Übungsklausur Geometrie 2 (Karte)
Pflichtteil (ohne Hilfsmittel)

1) Gegeben sind die Ebene $E:\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 10$ und die Gerade $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   a) Zeige, dass g parallel zu E ist.
   b) Bestimme den Abstand der Geraden g von der Ebene E. (2,5VP)

2) Gegeben sind die Ebene E mit $E:\ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

   und die Spurpunkte der Ebene H mit $S_1(2\,|\,0\,|\,0)$ und $S_2(0\,|\,4\,|\,0)$.
   a) Welche besondere Lage hat H im Koordinatensystem?
   b) Bestimme die Schnittgerade der Ebene E und der Ebene F mit $F: 2x_1 + x_2 = 4$ rechnerisch. (3,5VP)

3) Gegeben sind der Punkt $P(-2\,|\,3\,|\,0)$ und die Gerade $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

   a) Berechne den Abstand von P zu g.
   b) Bestimme die Koordinaten eines Punktes R, der von der Gerade doppelt so weit entfernt ist wie P. (4VP)

4) Gegeben ist die Ebene $E: x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 12$.
   Die Punkte $P(5\,|\,1\,|\,5)$, $Q(6\,|\,3\,|\,8)$ und R liegen auf der Geraden g.
   a) Untersuche, ob P und Q auf derselben Seite von E liegen.
   b) P und R haben denselben Abstand von der Ebene E. Bestimme die Koordinaten von R. (3VP)

5) Gegeben ist eine Gerade g im Raum und ein Punkt P, der nicht auf g liegt.
   Der Punkt P wird an der Geraden g gespiegelt.
   Beschreibe ein Verfahren zur Bestimmung des Bildpunktes P'.
   Fertige dazu eine Skizze an. (2VP)

Übungsklausur Geometrie 2 (Karte)

Lösungen Pflichtteil:

1) a) $\overrightarrow{n_E} \cdot \overrightarrow{m_g} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\cdot 1 + 2\cdot(-2) + 1\cdot 2 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{n_E} \perp \overrightarrow{m_g} \Rightarrow g \parallel E$ (1P)

b) HNF von E: $\frac{2x_1 + 2x_2 + x_3 - 10}{3} = 0$, Stützpunkt von g in HNF:

$d = \left|\frac{2\cdot 1 + 2\cdot 0 + 1\cdot 2 - 10}{3}\right| = \left|\frac{-6}{3}\right| = \boxed{2}$ (1,5P) **2,5P**

2) a) Da kein Spurpunkt auf x_3- Achse: H ist parallel zur x_3- Achse. (1P)

b) $E: 3x_1 - x_2 + x_3 = b$ Setze (1|3|2) in E ein $\Rightarrow b = 2$

$E: 3x_1 - x_2 + x_3 = 2$ (1P)

$F:\ 2x_1 + x_2 = 4$ Wähle $\boxed{x_1 = t} \Rightarrow \boxed{x_2 = 4 - 2t}$ in $E_1: 3t - 4 + 2t + x_3 = 2 \Leftrightarrow \boxed{x_3 = 6 - 5t}$

$\boxed{s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}}$ (1,5P) **3,5P**

3) a) (1) Hilfsebene: $E: 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = b$ P in E: $\Rightarrow b = 2 \Rightarrow E: 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2$

(2) Schnittpunkt g mit E: $2(3+2t) + 2(9+2t) + 3(4+3t) = 2$

$6 + 4t + 18 + 4t + 12 + 9t = 2 \Leftrightarrow 36 + 17t = 2 \Leftrightarrow 17t = -34 \Leftrightarrow t = -2$

$t = -2$ in g: $L(-1|5|-2)$

(3) Abstand: $d = \left|\overrightarrow{PL}\right| = \left|\begin{pmatrix} -1+2 \\ 5-3 \\ -2-0 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = \boxed{3}$ (2,5P)

b) $g_{LP}:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} -2+1 \\ 3-5 \\ 0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$

Für t = 0 bei L, für t = 1 bei P, für t = 2 bei $\boxed{R(-3|1|2)}$ (1,5P) **4P**

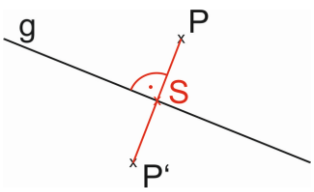
4) a) $g_{PQ}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ (0,5P) in E: $5 + t - 2\cdot(1+2t) + 3\cdot(5+3t) = 12$

$\Leftrightarrow 5 + t - 2 - 4t + 15 + 9t = 12 \Leftrightarrow 18 + 6t = 12 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow S(4|-1|2)$.

Da t nicht im Bereich $[0;1]$ liegt, liegen P und Q auf derselben Seite von E. (1,5P)

b) Z. B.: Spiegele P an S: $\boxed{R(3|-3|-1)}$ (1P) **3P**

5) Skizze (0,5P)



(1) Stelle eine Hilfsebene E auf, die senkrecht zu g verläuft und den Punkt P enthält:

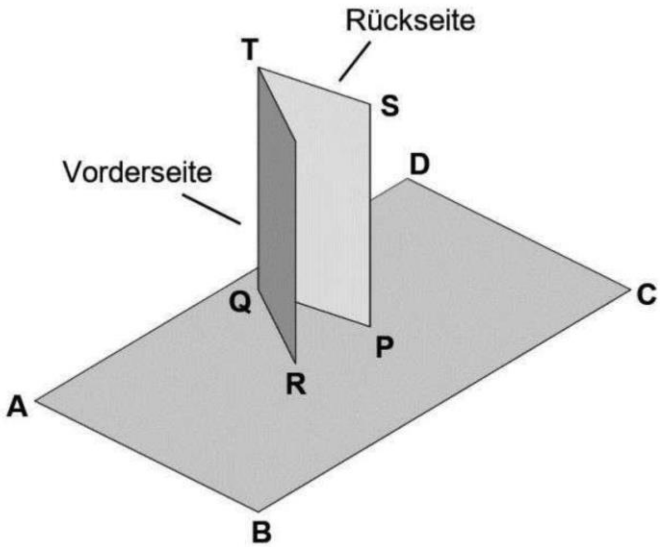
$E: \left[\vec{x} - \vec{p}\right]\cdot\overrightarrow{m_g} = 0$ (0,5P)

(2) Schneide g und E, der Schnittpunkt ist S. (0,5P)

(3) $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{PS}$ (0,5P) **2P**

Summe: 15 Punkte

Übungsklausur Geometrie 2 (Karte)
Wahlteil (Mit WTR und Merkhilfe)



Auf einem Tisch steht eine gefaltete, 20cm hohe Karte (siehe Abbildung). Sämtliche Kanten der Karte verlaufen entweder senkrecht oder parallel zur Tischfläche.
In einem Koordinatensystem stellen die Punkte $A(0|0|0)$, $B(80|0|0)$, $C(80|180|0)$ und $D(0|180|0)$ die Ecken des Tisches, die Punkte $P(20|145|0)$, $Q(8|140|0)$ und $R(20|135|0)$ Ecken der Karte dar
(Koordinatenangaben in cm).

a) (1) Zeige, dass das Dreieck PQR gleichschenklig ist.
(2) Es gibt einen Punkt N, für den das Viereck NPQR eine Raute ist. Bestimme die Koordinaten von N.
(3) 1cm² des Papiers, aus dem die Karte gefertigt ist, wiegt 16mg. Wie viel wiegt die Karte?
(4) Die Punkte P, Q, S und T liegen in der Ebene E. Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene E. (Teilergebnis: $E: -5x_1 + 12x_2 = 1640$)
(5) Die Punkte Q, R und T liegen in der Ebene F mit $F: 5x_1 + 12x_2 = 1720$.
Wie groß ist der Öffnungswinkel der Karte? (8VP)

b) Der Punkt $L(8|130|30)$ beschreibt die Position einer punktförmigen Lichtquelle.
Die Kante der Karte, die durch die Strecke ST dargestellt wird, wirft eine Schattenlinie, die vollständig auf der Tischplatte liegt.
Berechne die Länge dieser Schattenlinie. (4VP)

c) Nun wird die Vorderseite der Karte soweit geöffnet, dass der Öffnungswinkel 90° beträgt.
Die Rückseite der Karte bleibt an der bisherigen Position stehen.
Gib ein Gleichungssystem an, mit dem die unbekannten Koordinaten des Punktes $R_{neu}(a|b|c)$ bestimmt werden können. (3VP)

Übungsklausur Geometrie 2 (Karte)

Lösungen Wahlteil:

a) (1) $\left|\overrightarrow{QR}\right| = \left|\begin{pmatrix}12\\-5\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{12^2+(-5)^2} = 13 \quad \left|\overrightarrow{QP}\right| = \left|\begin{pmatrix}12\\5\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{12^2+5^2} = 13$

Somit ist das Dreieck PQR gleichschenklig. (1,5P)

(2) $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix}20\\135\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}12\\5\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}32\\140\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{N(32\,|\,140\,|\,0)}$ (1,5P)

(3) Oberfläche Karte = $2\cdot\left(\left|\overrightarrow{QR}\right|\cdot 20\right) = 2\cdot 13\cdot 20 = 520 \Rightarrow 520\text{cm}^2$

Masse Karte = $16\dfrac{\text{mg}}{\text{cm}^2}\cdot 520\text{cm}^2 = 8320\text{mg} \Rightarrow \boxed{8{,}32\text{g}}$ (1,5P)

(4) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}8\\140\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}12\\5\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix}12\\5\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-12\\0\end{pmatrix}$

$E: 5x_1 + 12x_2 = b$ Setze Q ein: $E: 5\cdot 8 - 12\cdot 140 = b \Rightarrow b = -1640$

$\boxed{E: 5x_1 - 12x_2 = -1640}$ (2P)

(5) $\cos(\alpha) = \dfrac{\left|\begin{pmatrix}5\\12\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\-12\\0\end{pmatrix}\right|}{13\cdot 13} = \dfrac{|25-144|}{169} = \dfrac{119}{169} \Rightarrow \boxed{\alpha = 45{,}24°}$ (1,5P) **8P**

b) Schneide die Gerade LS (und LT) mit der Tischebene

$S(20\,|\,145\,|\,20), T(8\,|\,140\,|\,20)$ (0,5P)

$g_{LS}: \vec{x} = \begin{pmatrix}8\\130\\30\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}12\\15\\-10\end{pmatrix}$ in $x_3 = 0 \Rightarrow 30 - 10s = 0 \Leftrightarrow s = 3 \Rightarrow \boxed{S'(44\,|\,175\,|\,0)}$ (1,5P)

$g_{LT}: \vec{x} = \begin{pmatrix}8\\130\\30\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\10\\-10\end{pmatrix}$ in $x_3 = 0 \Rightarrow 30 - 10s = 0 \Leftrightarrow s = 3 \Rightarrow \boxed{T'(8\,|\,160\,|\,0)}$ (1,5P)

$\overrightarrow{T'S'} = \begin{pmatrix}36\\15\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \left|\overrightarrow{T'S'}\right| = \sqrt{36^2+15^2} = 39 \Rightarrow \boxed{39\text{cm}}$ Schattenlänge (0,5P) **4P**

c) Mit $\overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix}12\\5\\0\end{pmatrix}$ (aus a) und $\overrightarrow{QR_{neu}} = \begin{pmatrix}a-8\\b-140\\0\end{pmatrix}$ (0,5P)

(I) $\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QR_{neu}} = 0$ (I) $12\cdot(a-8) + 5\cdot(b-140) = 0$ (1P)

(II) $\left|\overrightarrow{QR_{neu}}\right| = \left|\overrightarrow{QR}\right| = 13$ (II) $\sqrt{(a-8)^2+(b-140)^2} = 13$ (1P)

(III) Punkt hat Höhe 0 (III) $c = 0$ (0,5P) **3P**

Summe: 15 Punkte